CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ "OLIMPIADA SATELOR" DIN ROMÂNIA

14 februarie 2025 - Etapa locală – Brașov - CLASA a V-a

Problema 1

La numerotarea paginilor unei enciclopedii s-au folosit 2460 de cifre. Câte pagini are această enciclopedie?

Problema 2

a) Aflați restul împărțirii numărului $n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \cdot 257 + 235$ la 231.

b) Aflați suma numerelor naturale care împărțite la 9 dau restul egal cu o treime din cât.

Problema 3

Determinați suma numerelor de forma $\overline{abcd}$ în care $a = \frac{d}{5}$ și $\overline{ab}$ este egal cu o cincime din $\overline{cd}$.

Problema 4

Arătați că numărul $a = 5 \cdot (n+1) + 6^{2025} + 1001^{n+1} + 5$ nu poate fi pătrat perfect, oricare ar fi numărul natural n.

Toate subiectele sunt obligatorii!

Fiecare subiect de notează de la 0 la 7 puncte.
Nu se acordă puncte din oficiu.
Timpul efectiv de lucru este de 2 ore.

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ ”OLIMPIADA SATELOR” DIN ROMÂNIA

14 februarie 2025 - Etapa locală - Brașov - CLASA a V-a

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Problema 1 (7p)

La numerotarea paginilor unei enciclopedii s-au folosit 2460 de cifre. Câte pagini are această enciclopedie?

Barem

$1\cdot 9+2\cdot 90=189$ -cifre folosite la numerotarea paginilor cu o cifră și respectiv cu două cifre......1p
2460-189=2271-cifre rămase......1p
2271:3=757- pagini numerotate cu trei cifre......2p
Deci enciclopedia are 856 de pagini......3p

Problema 2 (7p)

a) (3p) Aflați restul împărțirii numărului $n=1\cdot 2\cdot 3...\cdot 257+235$ la 231.
b) (4p) Aflați suma numerelor naturale care împărțite la 9 dau restul egal cu o treime din cât.

Barem

a) 235:231= 1 rest 4......1p
$n=231\cdot A+4$, deci restul este 4......2p
b) $n=9\cdot 3r+r, r<9$......2p
n=0, 28, 56, 84, 112, 140, 168, 196, 224......1p
suma numerelor este 1008......1p

Problema 3 (7p)

Determinați suma numerelor de forma $\overline{abcd}$ în care $a=\frac{d}{5}$ și $\overline{ab}$ este egal cu o cincime din $\overline{cd}$.

Barem

Din $a=\frac{d}{5}$ avem $d=5a$, de unde $a=1$ și $d=5$ 2p

Din $\overline{cd}=5\cdot\overline{ab}$ avem $10c+5=50+5b$, de unde $2c=9+b$......2p

Deoarece $2c\geq 9$ avem $c\geq 5$ 1p

Se obțin numerele 1155,1365,1575,1785,1995 cu suma 7875 ......2p

Problema 4 (7p)

Arătați că numărul $a = 5 \cdot (n+1) + 6^{2025} + 1001^{n+1} + 5$ nu poate fi pătrat perfect, oricare ar fi numărul natural n.

Barem

$u(6^{2025}) = 6$ 1p

$u(1001^{n+1} = 1$ 1p

Pentru n-număr natural par $u(5(n+1)) = 5 \Rightarrow u(a) = 7$ 2p

Pentru n-număr natural impar $u(5(n+1)) = 0 \Rightarrow u(a) = 2$ 2p

7 și 2 nu pot fi ultimele cifre ale unui pătrat perfect, deci a nu este pătrat perfect......1p

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ "OLIMPIADA SATELOR" DIN ROMÂNIA

14 februarie 2025 - Etapa locală – Braşov - CLASA a VI-a

1) Să se determine mulţimile A şi B dacă sunt îndeplinite simultan condiţiile:

a) $A \cup B = \{x / x \in N$ şi $(3^x)^2 : 3^x + 2^3 \cdot 3^{x+1} \leq 2025\}$

b) $A \cap B = \{x / x \in N^*$ şi $(1^0 + 1^1 + 1^2 + 1^3 + 1^4)^x \leq 25\}$

c) $A \setminus B = \{x / x \in N$ şi x este cel mai mare divizor propriu al lui 8$\}$.

2) Se consideră numerele naturale nenule x şi y.

a) Ştiind că 40% din primul număr este egal cu 60% din al doilea număr, demonstraţi că numerele sunt direct proporţionale cu 3 şi 2.

b) Calculaţi cel mai mic multiplu comun al numerele x şi y dacă acestea sunt invers proporţionale cu numerele 0,(3), respectiv 0,5 şi $7x - 5y = 121$.

3) Se consideră punctele coliniare A, O şi B în această ordine. Se iau punctele C şi D în acelaşi semiplan faţă de dreapta AB, astfel încât unghiul AOC să fie ascuţit şi semidreptele OC şi OD să fie perpendiculare. Determinaţi măsura unghiului format de bisectoarele unghiurilor AOC şi DOB.

4) Punctele A, B, C, D, E sunt situate pe un cerc de centru O, astfel încât punctele A şi D sunt diametral opuse, $\overset{\frown}{AB} = \frac{1}{3} \cdot \overset{\frown}{AD}$, punctul C este mijlocul arcului BD, iar raportul măsurilor arcelor DE şi EA este $\frac{1}{5}$.

a) Calculaţi măsurile arcelor AB, BC, CD, DE şi EA.

b) Dacă semidreapta OM este bisectoarea unghiului AOB, demonstraţi că punctele M, O şi E sunt coliniare.

Toate subiectele sunt obligatorii!

Fiecare subiect de notează de la 0 la 7 puncte.
Nu se acordă puncte din oficiu.
Timpul efectiv de lucru este de 2 ore.

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ "OLIMPIADA SATELOR" DIN ROMÂNIA

14 februarie 2025 - Etapa locală - Brașov - CLASA a VI-a

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

1) Să se determine mulțimile A și B dacă sunt îndeplinite simultan condițiile:

a) $A \cup B = \{x / x \in N$ și $(3^x)^2 : 3^x + 2^3 \cdot 3^{x+1} \leq 2025\}$

b) $A \cap B = \{x / x \in N^*$ și $(1^0 + 1^1 + 1^2 + 1^3 + 1^4)^x \leq 25\}$

c) $A \setminus B = \{x / x \in N$ și x este cel mai mare divizor propriu al lui 8$\}$.

(7p)

Soluție:

Din $(3^x)^2 : 3^x + 2^3 \cdot 3^{x+1} \leq 2025$ obținem $3^x \leq 3^4$, de unde $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ ………………. **(2p)**

Din $(1^0 + 1^1 + 1^2 + 1^3 + 1^4)^x \leq 25$, avem $5^x \leq 5^2$, de un de $x \leq 2$ cu $x \in N^*$, deci $A \cap B = \{1, 2\}$…**(1p)**

$A \setminus B = \{4\}$ …………………………………………………………………………… **(1p)**

Obținem $A = \{1, 2, 4\}$ și $B = \{0, 1, 2, 3\}$ ………………………………………………… **(3p)**

2) Se consideră numerele naturale nenule x și y.

a) Știind că 40% din primul număr este egal cu 60% din al doilea număr, demonstrați că numerele sunt direct proporționale cu 3 și 2. **(2p)**

b) Calculați cel mai mic multiplu comun al numerele x și y dacă acestea sunt invers proporționale cu numerele 0,(3), respectiv 0,5 și $7x - 5y = 121$. **(5p)**

Soluție:

a) $\frac{40}{100} \cdot x = \frac{60}{100} \cdot y \Rightarrow 2x = 3y \Rightarrow \frac{x}{3} = \frac{y}{2}$, deci x și y sunt direct proporționale cu 3 și 2 ………**(2p)**

b) Din $x \cdot 0,(3) = y \cdot 0,5$ avem $\frac{x}{3} = \frac{y}{2} = k$, deci $x = 3k$ și $y = 2k$ ……………………………………**(2p)**

înlocuind în $7x - 5y = 121$, obținem $k = 11$, deci $x = 33$ și $y = 22$ …………………………………**(2p)**

iar c.m.m.m.c = 66……………………………………………………………………… **(1p)**

3) Se consideră punctele coliniare A, O și B în această ordine. Se iau punctele C și D în același semiplan față de dreapta AB, astfel încât unghiul AOC să fie ascuțit și semidreptele OC și OD să fie perpendiculare. Determinați măsura unghiului format de bisectoarele unghiurilor AOC și DOB.

Soluție:

Punctele coliniare A, O și B $\Rightarrow \sphericalangle AOB = 180^0$ …………………………………………………… **(1p)**

$OC \perp OD \Rightarrow \sphericalangle COD = 90^0$, $\sphericalangle AOC$ ascuțit $\Rightarrow$ semidreapta OC este în interiorul $\sphericalangle AOD$ … **(1p)**

$\sphericalangle AOC + \sphericalangle DOB = 90^0$ ……………………………………………………………………… **(1p)**

OE este bisectoarea $\sphericalangle AOC \Rightarrow \sphericalangle EOC = \sphericalangle AOC/2$ .... **(1p)**

OF este bisectoarea $\sphericalangle DOB \Rightarrow \sphericalangle DOF = \sphericalangle DOB/2$ .... **(1p)**

$\sphericalangle EOF = \sphericalangle EOC + \sphericalangle COD + \sphericalangle DOF = 90^0 + (\sphericalangle AOC + \sphericalangle DOB)/2 = 90^0 + 45^0 = 135^0$ .... **(2p)**

4) Punctele A, B, C, D, E sunt situate pe un cerc de centru O, astfel încât punctele A și D sunt diametral opuse, $\overset{\frown}{AB} = \frac{1}{3} \cdot \overset{\frown}{AD}$, punctul C este mijlocul arcului BD, iar raportul măsurilor arcelor DE și EA este $\frac{1}{5}$.

a) Calculați măsurile arcelor AB, BC, CD, DE și EA. **(5p)**

b) Dacă semidreapta OM este bisectoarea unghiului AOB, demonstrați că punctele M, O și E sunt coliniare. **(2p)**

Soluție:

a) punctele A și D diametral opuse $\Rightarrow \overset{\frown}{AD} = 180^0$, $\overset{\frown}{AB} = \frac{1}{3} \cdot \overset{\frown}{AD}$, deci $\overset{\frown}{AB} = 60^0$ ....**(1p)**

$\overset{\frown}{BD} = 120^0$, $\overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{CD} = 60^0$ ....**(1p)**

$\overset{\frown}{DE} = 30^0$, $\overset{\frown}{EA} = 150^0$ ....**(1p)**

b) $\sphericalangle AOB$ este unghi la centru $\Rightarrow \sphericalangle AOB = \overset{\frown}{AB} = 60^0$ ....**(1p)**

semidreapta OM este bisectoarea $\sphericalangle AOB \Rightarrow \sphericalangle MOB = \overset{\frown}{MB} = 30^0$ ....**(1p)**

$\sphericalangle MOE = \overset{\frown}{ME} = \overset{\frown}{MB} + \overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{CD} + \overset{\frown}{DE} = 180^0 \Rightarrow$ punctele M, O și E sunt coliniare.......**(2p)**

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ "OLIMPIADA SATELOR" DIN ROMÂNIA

14 februarie 2025 - Etapa locală – Braşov - CLASA a VII-a

Problema 1

a) Aflaţi numărul natural n pentru care are loc egalitatea

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\cdots\frac{1}{n(n+1)}=\frac{2025}{2026}$$

b) Demonstraţi că numărul A este divizibil cu 2025, pentru orice număr $n\in N^*$ dacă

$A= 3^{2n+5}\cdot 7^{n+1}+63^{n+1}+3^{2n+1}\cdot 7^{n}\cdot 87$

Problema 2

Se consideră numerele :

$$x=2\sqrt{6}\cdot|2-\sqrt{6}|+\frac{6(\sqrt{6}+2)}{\sqrt{6}}-2\sqrt{(\sqrt{6}-6)^2}$$

$$y=2\sqrt{6}\cdot\left(\frac{5}{\sqrt{3}}-\frac{3}{\sqrt{2}}\right)+|\sqrt{2}-24|-3|2\sqrt{3}-3\sqrt{2}|$$

a) Calculaţi valorile numerelor reale x şi y.
b) Calculaţi media aritmetică şi media geometrică a numerelor reale x şi y.

Problema 3

În pătratul ABCD, punctul M este mijlocul segmentului AB. Dacă dreptele DM şi AC se intersectează în punctul P şi aria triunghiului APD este 54 cm^2, calculaţi aria şi perimetrul pătratului ABCD.

Problema 4

În triunghiul isoscel ABC cu măsura unghiului A de 120^0, punctul M este mijlocul laturii AB. Perppendiculara din punctul M pe latura BC intersectează dreapta AC în punctul D şi dreapta AE este perpendiculară pe dreapta BC. Demonstraţi că:

a) Triunghiul DAM este echilateral;
b) Patrulaterul DAEM este romb;
c) $CD = 3\cdot AD$.

Toate subiectele sunt obligatorii!

Fiecare subiect de notează de la 0 la 7 puncte.
Nu se acordă puncte din oficiu.
Timpul efectiv de lucru este de 2 ore.

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ ”OLIMPIADA SATELOR” DIN ROMÂNIA

14 februarie 2025 - Etapa locală - Brașov - CLASA a VII-a

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Problema 1

a) Aflați numărul natural n pentru care are loc egalitatea: **(3 p)**

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\cdots\ \frac{1}{n(n+1)}=\frac{2025}{2026}$$

b) Demonstrați că numărul A este divizibil cu 2025, pentru orice număr $n\in N^*$ dacă

$A= 3^{2n+5}\cdot 7^{n+1}+63^{n+1}+3^{2n+1}\cdot 7^{n}\cdot 87$ **(4p)**

Soluție:

a) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots\ \frac{1}{n(n+1)}=\frac{2025}{2026}$ **(1p)**

$\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots\ \frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{2025}{2026}$ **(1p)**

$\frac{1}{1}-\frac{1}{n+1}=\frac{2025}{2026}\Rightarrow\frac{n}{n+1}=\frac{2025}{12026}\Rightarrow$ n= 2025 **(1p)**

b) $A= 3^{2n+5}\cdot 7^{n+1}+3^{2n+2}\cdot 7^{n+1}+3^{2n+1}\cdot 7^{n}\cdot 87$ **(1p)**

$A= 3^{2n}\cdot 7^{n}(3^{5}\cdot 7+3^{2}\cdot 7^{1}+3\cdot 87)$ **(1p)**

$A= 3^{2n}\cdot 7^{n}(1701+63+261)$ **(1p)**

$A= 3^{2n}\cdot 7^{n}\cdot 2025\Rightarrow$ A este divizibil cu 2025 **(1p)**

Problema 2

Se consideră numerele :

$$x = 2\sqrt{6}\cdot|2-\sqrt{6}|+\frac{6(\sqrt{6}+2)}{\sqrt{6}}-2\sqrt{\left(\sqrt{6}-6\right)^{2}}$$

$$y = 2\sqrt{6}\cdot\left(\frac{5}{\sqrt{3}}-\frac{3}{\sqrt{2}}\right)+|\sqrt{2}-24|-3|2\sqrt{3}-3\sqrt{2}|$$

a) Calculați valorile numerelor reale x şi y. **(4p)**
b) Calculați media aritmetică și media geometrică a numerelor reale x și y. **(3p)**

Soluție:

a) $x = 2\sqrt{6}\cdot(\sqrt{6}-2)+\frac{6\sqrt{6}(\sqrt{6}+2)}{6}-2(6-\sqrt{6})$ **(1p)**

$x = 12-4\sqrt{6}+6+2\sqrt{6}-12+2\sqrt{6}$

$x=6$ **(1p)**

$y=\left(\frac{5\cdot2\sqrt{6}}{\sqrt{3}}-\frac{3\cdot2\sqrt{6}}{\sqrt{2}}\right)+24-\sqrt{2}-3(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})$ **(1p)**

$y=10\sqrt{2}-6\sqrt{3}+24-\sqrt{2}-9\sqrt{2}+6\sqrt{3})$

$y= 24$ **(1p)**

b) $m_a=\frac{x+y}{2}=\frac{6+24}{2}=\frac{30}{2}=15$ **(1p)**

$m_g=\sqrt{x\cdot y}=\sqrt{6\cdot24}=\sqrt{144}=12$ **(1p)**

Problema 3

În pătratul ABCD, punctul M este mijlocul segmentului AB. Dacă dreptele DM și AC se intersectează în punctul P și aria triunghiului APD este 54 cm^2, calculați aria și perimetrul pătratului ABCD.
(7p)

Soluție:

Fie $AC\cap BD=\{O\}$. În triunghiul ABD , AD și AO sunt mediane ,

deci $AO\cap DM=\{P\}$= centrul de greutate al triunghiului ABD . **(2p)**

Avem A(ABD)= 3· A(APD)=3 · 54 = 162 cm^2 **(2p)**

DB este diagonala pătratului ABCD $\Rightarrow$ A(ABD)= A(BCD)= 162 cm^2

$\Rightarrow$ A(ABCD)=2· 162 cm^2 =324cm^2 **(1p)**

A(ABCD)= $l^2 \Rightarrow l^2 = 324 \Rightarrow l= 18$ cm **(1p)**

P(ABCD)= 4·l=4·18= 72 cm **(1p)**

Problema 4

În triunghiul isoscel ABC cu măsura unghiului A de 120^0, punctul M este mijlocul laturii AB. Perppendiculara din punctul M pe latura BC intersectează dreapta AC în punctul D și dreapta AE este perpendiculară pe dreapta BC. Demonstrați că:

a) Triunghiul DAM este echilateral;
b) Patrulaterul DAEM este romb;
c) $CD = 3\cdot AD$.

Soluție:

a) În triunghiul isoscel ABC, AE este înălțime deci și bisectoarea unghiului BAC
$\Rightarrow \sphericalangle CAE = \sphericalangle EAB = 60^0$

Punctele D,A,C sunt coliniare$\Rightarrow \sphericalangle DAM = 180^0 - 2\cdot 60^0 = 60^0$ **(1p)**

În triunghiul ABC, isoscel avem $\sphericalangle ABC = 30^0$. Cum MF $\perp$BC atunci $\sphericalangle BFM = 90^0$ **(1p)**

$\Rightarrow \sphericalangle BMF = 60^0$. Dar $\sphericalangle BMF = \sphericalangle DMA = 60^0$ fiind unghiuri opuse la vârf.

În consecință, triunghiul MAD este echilateral pentru că are 2 unghiuri cu măsura de 60^0 **(1p)**

b) În triunghiul AEC cu măsura unghiului AEC de 90^0 și măsura unghiului ACE de 30^0
$\Rightarrow$ din teorema unghiului de 30^0 că $AE = \frac{AC}{2}$ (1) **(1p)**

Punctul M este mijlocul laturii AB $\Rightarrow AM = \frac{AB}{2}$, AB=AC (2) **(1p)**

din (1) și (2) $\Rightarrow$ AE=AM și cum unghiul MAE are măsura de 60^0
$\Rightarrow$ triunghiul MAE este echilateral $\Rightarrow$ MA=AE=ME
La punctul a) am demonstrat că triunghiul MDA este echilateral $\Rightarrow$ MA=AD=MD
$\Rightarrow$ DA=AE=ME=DA $\Rightarrow$ DAEM este romb **(1p)**

c) La punctul b) am arătat că $AE = \frac{AC}{2} \Rightarrow$ AC=2·AE , dar AE =AD $\Rightarrow$ AC=2·AD
CD = AD + AC = AD+ 2AD = 3· AD **(1p)**